SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Resolver los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

a. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

Solución.

Se puede resolver por cualquier método, pero debido a que es fácil despejar la "y" de la primera ecuación, lo resuelvo por sustitución.

$$\begin{cases} 2x - 1 = y \\ x + 3y = 11 \end{cases} : \begin{cases} 2x - 1 = y \\ x + 3(2x - 1) = 11 \end{cases} : \begin{cases} 2x - 1 = y \\ x + 6x - 3 = 11 \end{cases} : \begin{cases} 2x - 1 = y \\ 7x = 14 \end{cases} : \begin{cases} 2x - 1 = y \\ x = \frac{14}{7} = 2 \end{cases} : \{ y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Solución: (2, 3).

b. $\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases}$

Solución.

Se empieza quitando denominadores de la segunda ecuación, para lo cual se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores (20).

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{cases}$$

despejando "y" de la primera ecuación y sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación, se calcula x

$$y = x - 1$$

$$8x + 15 \cdot (x - 1) = 100$$

$$x = \frac{100 + 15}{8 + 15} = 5$$

Conocido x, se calcula y

$$y = 5 - 1 = 4$$

Solución: (5, 4).

c. $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 5 \end{cases}$

Solución.

Se eliminan los denominadores de la segunda ecuación multiplicando por 5

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 25 \end{cases}$$

El sistema se resuelve por sustitución, despejando x de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda.

$$x = 1 + 3y$$

$$2 \cdot (1 + 3y) + 3y = 25 \ : \ 2 + 6y + 3y = 25 \ : \ 9y = 23 \ : \ y = \frac{23}{9}$$

Conocido el valor de y se calcula el valor de x.

$$x = 1 + 3 \cdot \frac{23}{9} = \frac{26}{3}$$

Solución: $\left(\frac{26}{3}, \frac{23}{9} \right)$

d. $\begin{cases} 12x - 3y = 12 \\ 8x + y = 20 \end{cases}$

Solución.

La primera ecuación se puede simplificar dividiendo por tres

$$\begin{cases} 4x - y = 4 \\ 8x + y = 20 \end{cases}$$

El sistema se resuelve por reducción. Sumando las ecuaciones se elimina "y".

$$12x = 24 : \ x = 2.$$

Conocido el valor de x se calcula el de y

$$y = 4$$

Solución: (2, 4).

e. $\begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 2x - 10y = 0 \end{cases}$

Solución.

La segunda ecuación se puede sismplificar por 2

$$\begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

El sistema se resuelve por reducción, sumando las ecuaciones se elimina "y" despejando x.

$$4x = 20 : \ x = 5$$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación se calcula "y".

$$5 - 5y = 0 \ : \ y = 1$$

Solución: (5, 1).

f. $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{3y}{4} = 5 \end{cases}$

Solución.

Se multiplica la segunda ecuación por el m.c.m. de los denominadores (20).

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 20\dfrac{2x}{5} + 20\dfrac{3y}{4} = 20 \cdot 5 \end{cases} : \begin{cases} x - y = 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{cases}$$

Sustitución:

$$\begin{cases} x - 1 = y \\ 8x + 15y = 100 \end{cases} : \begin{cases} x - 1 = y \\ 8x + 15(x - 1) = 100 \end{cases} : \begin{cases} x - 1 = y \\ 23x = 115 \end{cases} : \begin{cases} x - 1 = y \\ x = \dfrac{115}{23} = 5 \end{cases} : \{y = 5 - 1 = 4$$

Solución: (5, 4).

g. $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ \dfrac{3x}{4} - y = 2 \end{cases}$

Solución.

Igualación. Se despeja "y" en cada ecuación y se iguala.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x - 1}{3} \\ y = \dfrac{3x}{4} - 2 \end{cases} : \ \frac{x - 1}{3} = \frac{3x}{4} - 2$$

Se multiplica toda la ecuación por el m.c.m. (12).

$$12\frac{x-1}{3}=12\frac{3x}{4}-12\cdot 2\ :\ 4(x-1)=3\cdot 3x-24\ :\ 4x-4=9x-24\ :\ -5x=-20\ :\ x=\frac{-20}{-5}=4$$

Sustituyendo se calcula y.

$$y=\frac{4-1}{3}=1$$

Solución: (4, 1).

h. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1\end{cases}$

Solución.

Antes de empezar a resolver el sistema conviene quitar los denominadores multiplicando por el m.c.m. (ab).

$$\begin{cases}ab\dfrac{x}{a}+ab\dfrac{y}{b}=ab\cdot 1\\ ab\dfrac{x}{b}+ab\dfrac{y}{a}=ab\cdot 1\end{cases}\ :\ \begin{cases}bx+ay=ab\\ ax+by=ab\end{cases}$$

Sustitución, despejo "y" en la 1ª ecuación para sustituirlo en la 2ª.

$$y=\frac{ab-bx}{a}\ :\ ax+b\frac{ab-bx}{a}=ab\ :\ ax+\frac{ab^2-b^2x}{a}=ab$$

Se multiplica toda la ecuación por a para quitar el denominador, y se despeja x en función de a y b.

$$a\cdot ax+a\frac{ab^2-b^2x}{a}=a\cdot ab\ :\ a^2x+ab^2-b^2x=a^2b\ :\ a^2x-b^2x=a^2b-ab^2\ :\ x\left(a^2-b^2\right)=ab(a-b)$$

$$x=\frac{ab(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{ab}{a+b}$$

Conocido el valor de x se calcula y sustituyendo.

$$y=\frac{ab-b\dfrac{ab}{a+b}}{a}=\frac{ab-\dfrac{ab^2}{a+b}}{a}=\frac{ab(a+b)-ab^2}{a(a+b)}=\frac{a^2b+ab^2-ab^2}{a(a+b)}=\frac{a^2b}{a(a+b)}=\frac{ab}{a+b}$$

Solución: $\left(\dfrac{ab}{a+b},\dfrac{ab}{a+b}\right)$

i. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\\ bx-ay=0\end{cases}$

Solución.

Antes de empezar a resolver el sistema conviene quitar los denominadores multiplicando por el m.c.m. (ab).

$$\begin{cases}ab\dfrac{x}{a}+ab\dfrac{y}{b}=ab\cdot 2\\ bx-ay=0\end{cases}\ :\ \begin{cases}bx+ay=2ab\\ bx-ay=0\end{cases}$$

Reducción. Sumando las ecuaciones se elimina "y" y se calcula x.

$$2bx=2ab\ :\ x=\frac{2ab}{2b}=a$$

Restando las ecuaciones se elimina "x" y se calcula y.

$$2ay=2ab\ :\ y=\frac{2ab}{2a}=b$$

Solución: (a, b).

j. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+2y}=1 \\ \dfrac{1}{3y-2x}=-\dfrac{1}{7} \end{cases}$

Solución.

Antes de empezar a resolver el sistema conviene invertir las ecuaciones para quitar los denominadores.

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2y}{1}=\dfrac{1}{1} \\ \dfrac{3y-2x}{1}=-\dfrac{7}{1} \end{cases} : \begin{cases} 3x+2y=1 \\ 3y-2x=-7 \end{cases}$$

Sustitución.

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ y=\dfrac{2x-7}{3} \end{cases} : \ 3x+2\dfrac{2x-7}{3}=1 : \ 3x+\dfrac{4x-14}{3}=1 : \ \dfrac{3x\cdot 3+4x-14}{3}=1$$

$$13x-14=3 : \ 13x=17 : \ x=\frac{17}{13}$$

Conocido el valor de “x” se calcula “y”.

$$y=\frac{2\cdot\frac{17}{13}-7}{3}=\frac{\frac{2\cdot 17-7\cdot 13}{13}}{3}=\frac{-57}{3\cdot 13}=\frac{-19}{13}$$

Solución: $\left(\dfrac{17}{13},-\dfrac{19}{13}\right)$

k. $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{3}=x-\dfrac{2y-4}{15} \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

Solución.

Antes de empezar a resolver el sistema conviene ordenarlo, para lo cual se multiplica la 1ª ecuación por 15.

$$\begin{cases} 15\dfrac{x-2y}{3}=15x-15\dfrac{2y-4}{15} \\ 3x-2y=4 \end{cases} : \begin{cases} 5(x-2y)=15x-(2y-4) \\ 3x-2y=4 \end{cases} : \begin{cases} 5x-10y=15x-2y+4 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x-8y=4 \\ 3x-2y=4 \end{cases} : \begin{cases} 5x+4y=-2 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$$

Reducción. Se multiplica la segunda ecuación por dos y se suman las ecuaciones resultantes.

$$\begin{cases} 5x+4y=-2 \\ 6x-4y=8 \end{cases} : (+): 11x=6 : \ x=\frac{6}{11}$$

Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación se calcula “y”.

$$3\frac{6}{11}-2y=4 : \ 2y=\frac{18}{11}-4=-\frac{26}{11} : \ y=-\frac{13}{11}$$

Solución: $\left(\dfrac{6}{11},-\dfrac{13}{11}\right)$

2. Resolver los siguientes sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

a. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ y+z=4 \\ x+z=5 \end{cases}$

Solución.

Aunque se pueden aplicar los mismos métodos que en los sistemas lineales de dos incógnitas. Recomiendo que para este tipo de sistemas se emplee el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} = \{E_3 = E_3 - E_1\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix} = \{E_3 = E_3 + E_2\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Sistema asociado: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y+z=4 \\ \qquad z=3 \end{cases} : \begin{cases} x+y+3=6 \\ y+3=4 : y=1 \end{cases} : \{x+1+3=6 : x=2$

Solución: (2, 1, 3).

b. $\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=8 \\ x+z=6 \end{cases}$

Solución.

Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 8 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix} = \{E_3 = E_3 - E_1\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -6 \end{pmatrix} = \{E_3 = E_3 + E_2\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Sistema asociado: $\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=8 \\ 2z=2 : z=1 \end{cases} : \begin{cases} x+y=12 \\ y+1=8 : y=7 \end{cases} : \{x+7=12 : x=5$

Solución: (5, 7, 1).

c. $\begin{cases} 8x+4y-5z=21 \\ x-y+2z=3 \\ 3x-2y-z=12 \end{cases}$

Solución.

Gauss. Cambiamos la posición de la 1ª y 2ª ecuación para facilitar la triangularización.

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 & \vdots & 21 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 12 \end{pmatrix} = \{E_1 \leftrightarrow E_2\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 8 & 4 & -5 & \vdots & 21 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 12 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} E_2 = E_2 - 8E_1 \\ E_3 = E_3 - 3E_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 12 & -21 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & -7 & \vdots & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \{E_3 = 12E_3 - E_2\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 12 & -21 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & -63 & \vdots & 39 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} E_2 = E_2/3 \\ E_2 = E_2/3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 4 & -7 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & -21 & \vdots & 13 \end{pmatrix}$$

Sistema asociado: $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 4y-7z=-1 \\ -21z=13 : z=-\dfrac{13}{21} \end{cases} : \begin{cases} x-y+2\dfrac{-13}{21}=3 : x-y=\dfrac{89}{21} \\ 4y-7\cdot\dfrac{-13}{21}=-1 : y=\dfrac{-1-\frac{91}{21}}{4}=-\dfrac{4}{3} \end{cases} :$

$$\left\{ x - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{89}{21} : x = \frac{61}{21} \right.$$

Solución: $\left(\frac{61}{21}, -\frac{4}{3}, -\frac{13}{21}\right)$

d. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = \frac{11}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = \frac{5}{3} \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = \frac{11}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = \frac{5}{3} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{x} + 2\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{11}{12} \\ 3\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + 2\frac{1}{z} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Para facilitar la solución sometemos al sistema a un cambio de variables:

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{1}{x} \\ b = \frac{1}{y} \\ c = \frac{1}{z} \end{array}\right\} : \begin{cases} a + b + c = \frac{13}{12} \\ a + 2b - c = \frac{11}{12} \\ 3a - b + 2c = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & \frac{13}{12} \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & \frac{11}{12} \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - 3E_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & \frac{13}{12} \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{-1}{6} \\ 0 & -4 & -1 & \vdots & \frac{-19}{12} \end{pmatrix} = \{E_3 = E_3 + 4E_2\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & \frac{13}{12} \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & -9 & \vdots & \frac{-9}{4} \end{pmatrix}$$

Sistema asociado: $\begin{cases} a + b + c = \frac{13}{12} \\ b - 2c = \frac{-1}{6} \\ -9c = \frac{-9}{4} : c = \frac{1}{4} \end{cases} : \begin{cases} a + b + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} : \ a + b = \frac{5}{6} \\ b - 2\frac{1}{4} = \frac{-1}{6} : \ b = \frac{-1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{cases} :$

$$\left\{ a + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} : a = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \right.$$

Conocidos los valores de a, b y c, se deshace el cambio y se calcula x, y, z.

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \\ b = \frac{1}{3} = \frac{1}{y} \\ c = \frac{1}{4} = \frac{1}{z} \end{array}\right\} : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Solución: (2, 3, 4).

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 1ª ecuación (lineal) se despeja una variable (y) y se sustituye en la 2ª ecuación.

$$\begin{cases} y = \dfrac{1-3x}{2} \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} : \begin{cases} x^2 - \left(\dfrac{1-3x}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

En este punto se puede hacer de dos formas diferentes.

1ª. Desarrollando los cuadrados y convirtiendo la igualdad en una ecuación de 2º grado.

$$x^2 - \frac{(1-3x)^2}{2^2} = 0 : \frac{4x^2 - \left(1^2 - 2\cdot 1\cdot 3x + (3x)^2\right)}{4} = 0 : 4x^2 - 1 + 6x - 9x^2 = 0$$

$$-5x^2 + 6x - 1 = 0 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} \xrightarrow{y=\frac{1-3x}{2}} y = \dfrac{1}{5} \\ x = 1 \xrightarrow{y=\frac{1-3x}{2}} y = -1 \end{cases}$$

2º Quitando los cuadrados mediante la raíz.

$$x^2 - \left(\frac{1-3x}{2}\right)^2 = 0 : x^2 = \left(\frac{1-3x}{2}\right)^2 : \frac{1-3x}{2} = \pm x : \begin{cases} (+): \dfrac{1-3x}{2} = x : x = \dfrac{1}{5} \xrightarrow{y=\frac{1-3x}{2}} y = \dfrac{1}{5} \\ (-): \dfrac{1-3x}{2} = -x : x = 1 \xrightarrow{y=\frac{1-3x}{2}} y = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ ó $(1, -1)$.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 2ª ecuación (lineal) se despeja una variable (x) y se sustituye en la 1ª ecuación.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x = 2y - 4 \end{cases} : (2y-4)^2 + y^2 = 13 : (2y)^2 - 2\cdot 2y\cdot 4 + 4^2 + y^2 = 13$$

$$5y^2 - 16y + 3 = 0 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \begin{cases} y = 3 \xrightarrow{x=2y-4} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} \xrightarrow{x=2y-4} x = -\dfrac{18}{5} \end{cases}$$

Soluciones: $(2, 3)$ ó $\left(-\frac{18}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 2ª ecuación (lineal) se despeja una variable (y) y se sustituye en la 1ª ecuación.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ y = 8 - x \end{cases} : x^2 - (8-x)^2 = 16 : x^2 - \left(8^2 - 2\cdot 8\cdot x + x^2\right) = 16 : x^2 - 64 + 16x - x^2 = 16$$

$$16x = 80 \;:\; x = 5 \xrightarrow{y=8-x} y = 3$$

Solución: (5, 3).

d) $\begin{cases} y^2 + 3x = 6 \\ 2y - x = 5 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 2ª ecuación (lineal) se despeja una variable (x) y se sustituye en la 1ª ecuación.

$$\begin{cases} y^2 + 3x = 6 \\ x = 2y - 5 \end{cases} : \; y^2 + 3(2y-5) = 6 \;:\; y^2 + 6y - 21 = 0 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \begin{cases} y = -3 + \sqrt{30} \\ y = -3 - \sqrt{30} \end{cases}$$

Conocido y se calcula x: $\begin{cases} y = -3 + \sqrt{30} \xrightarrow{x=2y-5} x = -11 + 2\sqrt{30} \\ y = -3 - \sqrt{30} \xrightarrow{x=2y-5} x = -11 - 2\sqrt{30} \end{cases}$

Soluciones: $\left(-11 + 2\sqrt{30}, -3 + \sqrt{30}\right)$ ó $\left(-11 - 2\sqrt{30}, -3 - \sqrt{30}\right)$

e) $\begin{cases} xy = 35 \\ x^2 + y^2 = 74 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 1ª ecuación se despeja una variable (y) y se sustituye en la 2ª ecuación.

$$\begin{cases} y = \dfrac{35}{x} \\ x^2 + y^2 = 74 \end{cases} : \; x^2 + \left(\frac{35}{x}\right)^2 = 74 \;:\; x^2 + \frac{35^2}{x^2} = 74$$

Se multiplica toda la ecuación por x^2 para quitar el denominador, y se ordena como bicuadrada.

$$x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot \frac{35^2}{x^2} = x^2 \cdot 74 \;:\; x^4 - 74x^2 + 1225 = 0$$

A una ecuación bicuadrada se le puede aplicar expresión de las ecuaciones de 2º grado y calcular el valor de x^2.

$$x^4 - 74x^2 + 1225 = 0 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \begin{cases} x^2 = 49 : x = \pm 7 \xrightarrow{y=\frac{35}{x}} y = \pm 5 \\ x^2 = 25 : x = \pm 5 \xrightarrow{y=\frac{35}{x}} y = \pm 7 \end{cases}$$

Soluciones: (7, 5); (–7, –5); (5, 7); (–5, –7).

f) $\begin{cases} xy + 2x + y = 12 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 2ª ecuación se despeja una variable (y) y se sustituye en la 1ª ecuación.

$$\begin{cases} xy + 2x + y = 12 \\ y = 3x + 2 \end{cases} : \; x(3x+2) + 2x + (3x+2) = 12 \;:\; 3x^2 + 2x + 2x + 3x + 2 = 12$$

$$3x^2 + 7x - 10 = 0 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \begin{cases} x = 1 \xrightarrow{y=3x+2} y = 5 \\ x = -\dfrac{10}{3} \xrightarrow{y=3x+2} y = -8 \end{cases}$$

Soluciones: (1, 5); $\left(-\dfrac{10}{3}, -8\right)$

g) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

Solución.

Por reducción. Sumando las ecuaciones se despeja x, restendo las ecuaciones se despeja y.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} : \begin{cases} (+)E_1 + E_2 : 2x^2 = 18;\ \ x^2 = 9;\ \ x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ (-)E_1 - E_2 : -2y^2 = -2;\ \ y^2 = 1;\ \ y = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Puesto que las variables están al cuadrado, son solución del sistema: (3, 1); (–3, 1); (3, –1); (–3, –1).

h) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ xy = 35 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 2ª ecuación se despeja una variable (y) y se sustituye en la 1ª ecuación.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ y = \dfrac{35}{x} \end{cases} : x^2 - \left(\frac{35}{x}\right)^2 = 24 :\ x^2 - \frac{35^2}{x^2} = 24$$

Ordenando se obtiene una ecuación bicuadrada

$$x^4 - 24x^2 - 35^2 = 0\ :\ \ x^4 - 24x^2 - 1225 = 0$$

$$x^4 - 24x^2 - 1225 = 0 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \begin{cases} x^2 = 49 : x = \pm 7 \xrightarrow{y=\frac{35}{x}} y = \pm 5 \\ x^2 = -25 : x \notin R \end{cases}$$

Soluciones: (7, 5); (–7, –5)

i) $\begin{cases} xy = 12 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 2ª ecuación se despeja una variable (y) y se sustituye en la 1ª ecuación.

$$\begin{cases} xy = 12 \\ y = \dfrac{3x-1}{2} \end{cases} :\ x \cdot \frac{3x-1}{2} = 12 :\ \ 3x^2 - x = 24$$

$$3x^2 - x - 24 = 0 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \begin{cases} x = 3 \xrightarrow{y=\frac{3x-1}{2}} y = 4 \\ x = -\dfrac{8}{3} \xrightarrow{y=\frac{3x-1}{2}} y = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Solución: (3, 4); $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{9}{2}\right)$

j) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ -x^2 - 2y + 2 = 0 \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 1ª ecuación se despeja x^2 y se sustituye en la 2ª ecuación.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ -2y + 2 = x^2 \end{cases} : (-2y + 2) - y^2 = 3$$

Ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$y^2+2y+1=0 \to y=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 0}{2}=-1 \text{ Raíz doble}$$

$$y=-1 \xrightarrow{-2y+2=x^2} x=\pm\sqrt{-2\cdot(-1)+2}=\pm 2$$

Solución: (–1, 2); (–1, –2)

k) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{20} \\ x-y=1 \end{cases}$

Solución.

La primera ecuación se puede operar y simplificar el sistema

$$\begin{cases} \frac{y-x}{x\cdot y}=-\frac{1}{20} \\ x-y=1 \end{cases} : \begin{cases} \frac{-(x-y)}{x\cdot y}=-\frac{1}{20} \\ x-y=1 \end{cases} : \begin{cases} -\frac{1}{x\cdot y}=-\frac{1}{20} \\ x-y=1 \end{cases} : \begin{cases} x\cdot y=20 \\ x-y=1 \end{cases}$$

De la 2ª ecuación se despeja una variable (y) y se sustituye en la 1ª ecuación.

$$\begin{cases} x\cdot y=20 \\ x-1=y \end{cases} : x\cdot(x-1)=20 : \ x^2-x-20=0$$

$$x^2-x-20=0 \xrightarrow{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \begin{cases} x=5 \xrightarrow{y=x-1} y=4 \\ x=-4 \xrightarrow{y=x-1} y=-5 \end{cases}$$

Solución: (5, 4); (–4, –5)

l) $\begin{cases} x-2y=1 \\ \sqrt{x+y}=x-y \end{cases}$

Solución.

Sustitución. De la 1ª ecuación se despeja "x" para sustituir en la 2ª ecuación.

$$\begin{cases} x=1+2y \\ \sqrt{x+y}=x-y \end{cases} : \sqrt{(1+2y)+y}=(1+2y)-y \ : \ \sqrt{1+3y}=1+y$$

Se eleva al cuadrado para quitar la raíz. Ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado

$$\left(\sqrt{1+3y}\right)^2=(1+y)^2 \ : \ 1+3y=1^2+2\cdot 1\cdot y+y^2 \ : \ y^2-y=0 \ : \ y\cdot(y-1)=0 : \begin{cases} y=0 \\ y-1=0 : y=1 \end{cases}$$

$$\text{Si } y=0 \xrightarrow{x=1+2y} x=1$$

$$\text{Si } y=1 \xrightarrow{x=1+2y} x=3$$

Las posibles soluciones se comprueban en la ecuación irracional.

$$(1,0) : \sqrt{1+0}=1-0 : 1=1 \ \text{ Válida}$$

$$(3,1) : \sqrt{3+1}=3-1 : 2=2 \ \text{ Válida}$$

Soluciones: (1, 0); (3,1).